DIE JACOBI–GUDERMANN–GLAISHER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN NACH HEINE

THOMAS ERNST

Classification: Primary 33E05; Secondary 33-03, 01A55

ZUSAMMENFASSUNG. The Jacobi-Gudermann-Glaisher elliptic functions are expressed as real or imaginary parts of q-hypergeometric series with exponential function argument. We give a description of the pertinent Gudermann–Grünert school. We give some philosophical remarks on the history of elliptic functions.

Die Jacobi-Gudermann-Glaisher elliptischen Funktionen werden mit Hilfe einer Reihenentwicklung als Re oder Im von q-hypergeometrischen Reihen mit exponentialem Argument ausgedrückt.
Wir geben eine Beschreibung der dazugehörigen Gudermann–Grünert Schule. Wir geben einige philosophische Bemerkungen zur Geschichte der elliptischen Funktionen.

1. Einleitung

Dieses Paper ist wie folgt organisiert. Im ersten Kapitel geben wir die ersten Definitionen und die ersten Beispiele des Schlange- Operators zu den q-trigonometrischen Funktionen.

Zu derer Anwendung, brauchen wir die zwei dualen Formen der q-Addition. Da die q-Addition nicht im Fokus dieser Arbeit steht, verweisen wir auf [24] für eine ausführlichere Beschreibung. Im Kapitel zwei geben wir eine kurze Zusammenstellung über den Einfluss von Hindenburgs kombinatorischer Schule auf Gudermann und auch dessen Einfluss auf spätere Mathematiker bis 1958.

Im dritten Kapitel geben wir die Formeln für die elliptischen Funktionen als q-Reihen in geschlossener Form. In Jacobi's Fundamenta nova [56, & 39] wurden nur die ersten Terme gegeben. Wir ziehen dabei die anderen Werke von Gudermann [43] und Glaisher [31] - [36] in Betracht.

Wir beschreiben zuerst kurz das vom Autor entwickelte q-umbral Kalkül [19]– [26]. Diese Methode wurde implizit in einem vorhergehenden Paper [23] verwendet, in dem unter anderem Entwicklungsformeln

Date: 3. September 2007.

für doppelte q-hypergeometrische Reihen im Geiste von Burchnall-Chaundy hergeleitet worden sind.

Diese Methode ist eine Zusammensetzung von Ideen von Heine 1846 [48] und Gasper-Rahman [28]. Die Vorteile dieser Methode sind zusammengefasst worden in [21, p. 495].

Definition 1. Die Potenz-Funktion wird definiert durch $q^a = e^{alog(q)}$. Wir benutzen immer den Hauptwert des Logarithmus. Die Variablen

$$a, b, c, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{C}$$

bezeichnen bestimmte Parameter. Die Variablen i, j, k, l, m, n, p, r bezeichnen natürliche Zahlen ausser in bestimmten Fällen, in denen es vom Zusammenhang klar ist, dass i die Imaginäre Einheit bezeichnet. Im Zusammenhang mit elliptischen Funktionen bezeichnet k immer den Modul. Die q–Analoga von einer komplexen Zahl a und von der Faktorielle werden auf folgender Weise definiert:

$$\{a\}_q \equiv \frac{1-q^a}{1-q},\ q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \tag{1}$$

$$\{n\}_q! \equiv \prod_{k=1}^{n} \{k\}_q,\ \{0\}_q! \equiv 1,\ q \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Definition 2. Die q–Faktorielle wird definiert durch

$$\langle a;q\rangle_n \equiv \begin{cases} 1, & n=0; \\ \prod_{m=0}^{n-1}(1-q^{a+m}) & n=1,2,\ldots, \end{cases} \tag{3}$$

Wir benutzen häufig folgende, mehr kompakte Darstellung, um die häufig auftretenden Produkte von q–Faktorielle zu vereinfachen:

$$\langle a, b;q\rangle_n \equiv \langle a;q\rangle_n \langle b;q\rangle_n. \tag{4}$$

Weiterhin

$$(a;q)_\infty \equiv \prod_{m=0}^{\infty}(1-aq^m),\ 0<|q|<1. \tag{5}$$

$$(a;q)_\alpha \equiv \frac{(a;q)_\infty}{(aq^\alpha;q)_\infty},\ a \neq q^{-m-\alpha}, m=0,1,\ldots. \tag{6}$$

Definition 3. Der Schlange-Operator

$$\sim: \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}} \mapsto \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}}$$

wird definiert durch

$$a \mapsto a + \frac{\pi i}{\log q}. \tag{7}$$

Eine Folge von (7) ist

$$\widetilde{\langle a; q\rangle}_n = \prod_{m=0}^{n-1}(1 + q^{a+m}). \tag{8}$$

Es ist wünschenswert, diesen Operator folgendermassen zu verallgemeinern, um eine allgemeine Einheitswurzel behandeln zu können. In den Gleichungen (9) bis (19) wird angenommen, dass $(m, l) = 1$.

Definition 4. Der verallgemeinerte Schlange-Operator

$$\widetilde{\tfrac{m}{l}} : \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}} \mapsto \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}}$$

wird definiert durch

$$a \mapsto a + \frac{2\pi i m}{l \log q}. \tag{9}$$

Das bedeutet

$$\langle \widetilde{\tfrac{m}{l}} a; q\rangle_n = \prod_{m=0}^{n-1}(1 - e^{2\pi i \frac{m}{l}} q^{a+m}). \tag{10}$$

Weiter definieren wir

$$\widetilde{{}^{\frac{m}{l}}\langle a; q\rangle}_n \equiv \langle \widetilde{\tfrac{m}{l}} a; q\rangle_n. \tag{11}$$

Wir benötigen auch eine andere Verallgemeinerung des Schlange-Operators.

$$\widetilde{{}_k\langle a; q\rangle}_n \equiv \prod_{m=0}^{n-1}(\sum_{i=0}^{k-1} q^{i(a+m)}). \tag{12}$$

Daher erhalten wir

$$\widetilde{{}_2\langle a; q\rangle}_n \equiv \widetilde{\langle a; q\rangle}_n. \tag{13}$$

$$\widetilde{{}_1\langle a; q\rangle}_n \equiv 1. \tag{14}$$

und

$$\widetilde{{}_k\langle a; q\rangle}_n \equiv \langle \widetilde{{}_k a}; q\rangle_n. \tag{15}$$

Die folgenden, einfachen Regeln folgen von (9). Einige von ihnen waren vorher bekannt in anderer Darstellung in [28].

Satz 1.1.

$$\widetilde{\tfrac{m}{l}} a \pm b \equiv {}^{\frac{m}{l}}\widetilde{(a \pm b)} \bmod \frac{2\pi i}{\log q}, \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{{}^{\frac{1}{n}} \pm a_k} \equiv \sum_{k=1}^{n} \pm a_k \bmod \frac{2\pi i}{\log q}, \tag{17}$$

$$\frac{m}{l} \times \widetilde{a} \equiv_{\frac{m}{2l}} \frac{\widetilde{am}}{l} \mod \frac{2\pi i}{\log q}, \tag{18}$$

$$\mathrm{QE}(\widetilde{\tfrac{m}{l}a}) = \mathrm{QE}(a)e^{\frac{2\pi i m}{l}}, \tag{19}$$

wo die zweite Gleichung eine Konsequenz der Tatsache ist, dass wir $\mathrm{mod}\frac{2\pi i}{\log q}$ *arbeiten.*

Satz 1.2.

$$\langle \widetilde{a}; q^2\rangle_n = \langle \widetilde{\tfrac{1}{4}a}, \widetilde{\tfrac{3}{4}a}; q\rangle_n. \tag{20}$$

$$\langle a; q^p\rangle_n = \prod_{k=0}^{p-1} \langle \widetilde{\tfrac{k}{p}a}; q\rangle_n, \text{ wo } p \text{ eine ungerade Primzahl ist.} \tag{21}$$

$$\langle a; q^k\rangle_n = \langle a; q\rangle_n \times {}_k\widetilde{\langle a; q\rangle}_n. \tag{22}$$

Das führt zum folgenden q-Analogon von Rainville [73, p.22, (2)].

Satz 1.3.

$$\langle a; q\rangle_{kn} = \prod_{m=0}^{k-1} \langle \frac{a+m}{k}; q\rangle_n \times_k \langle \widetilde{\frac{a+m}{k}}; q\rangle_n. \tag{23}$$

Definition 5. Wir definieren eine verallgemeinerte q–hypergeometrische Reihe durch

$$\begin{aligned} &{}_{p+p'}\phi_{r+r'}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p; \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_r | q, z || s_1, \ldots, s_{p'}; t_1, \ldots, t_{r'}) \equiv \\ &{}_{p+p'}\phi_{r+r'}\left[\begin{array}{c} \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p \\ \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_r \end{array} | q, z || \begin{array}{c} s_1, \ldots, s_{p'} \\ t_1, \ldots, t_{r'} \end{array}\right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle \hat{a}_1; q\rangle_n \ldots \langle \hat{a}_p; q\rangle_n}{\langle 1; q\rangle_n \langle \hat{b}_1; q\rangle_n \ldots \langle \hat{b}_r; q\rangle_n} \left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+r+r'-p-p'} \times \\ &z^n \prod_{k=1}^{p'} (s_k; q)_n \prod_{k=1}^{r'} (t_k; q)_n^{-1}, \end{aligned} \tag{24}$$

wo $q \neq 0$ wenn $p + p' > r + r' + 1$, und für $\widehat{a}$ können wir haben

$$\widehat{a} \equiv \begin{cases} a, \\ \widetilde{a}, \\ \widetilde{\tfrac{m}{l}a}, \\ {}_k\widetilde{a} \end{cases} \tag{25}$$

Bemerkung 1. In einigen Fällen, falls $0 < |q| < 1$, ist der Parameter $\hat{a}$ in (24) unendlich.

Im formalen Sinne könnten wir ein Symbol ∞_{H} einführen mit der Eigenschaft

$$\langle\infty_{\mathrm{H}};q\rangle_n=\langle\infty_{\mathrm{H}}+\alpha;q\rangle_n=1,\ \alpha\in\mathbb{C},\ 0<|q|<1. \tag{26}$$

Die Bezeichnung ∞_{H} entspricht dann dem Parameter 0 in [28, p. 4]. Im Folgendem bezeichnen wir ∞_{H} durch ∞.

Die Faktoren $\langle\widehat{a};q\rangle_n$ entsprechen dann einer Multiplikation mit 1.

Bemerkung 2. Die Parameter $\hat{a_i}$ und $\hat{b_i}$ auf der linken Seite von $|$ in (24) sind Exponenten; sie sind periodisch mod$\frac{2\pi i}{\log q}$.

Die allgemeine Gleichung (24), mit Parametern $\neq 0$ auf der rechten Seite von $||$ wird in bestimmten speziellen Fällen verwendet, wenn wir Faktoren wie $(t;q)_n$ benötigen in der q–Reihe. Ein Beispiel ist das q–Analogon einer bilinearen erzeugenden Funktion für Laguerre-Polynome [21].

Beispiel 1. Euler fand folgende zwei q-Analoge der Exponentialfunktion:

$$e_q(z)\equiv\ {}_1\phi_0(\infty;-|q,z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\langle 1;q\rangle_n}=\frac{1}{(z;q)_\infty},\ |z|<1,\ 0<|q|<1. \tag{27}$$

$$e_{\frac{1}{q}}(z)\equiv\ {}_0\phi_0(-;-|q,-z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{n}{2}}}{\langle 1;q\rangle_n}z^n=(-z;q)_\infty,\ 0<|q|<1. \tag{28}$$

Die zweite Funktion ist eine ganze Funktion, genau wie die Exponentialfunktion.

Beispiel 2. Die Lambertsche Reihe [62], [56, & 66], [74]

$$\frac{q}{1-q}\ {}_2\phi_1\left(1,1;2|q;q\right) \tag{29}$$

ist das zweite Beispiel einer q–hypergeometrischen Reihe. Euler und Schläfli haben auch die Lambertsche Reihe untersucht.

Wir kommen jetzt zu den zwei Formen der q-Addition.

Definition 6. Die Nalli–Ward–AlSalam q-Addition (NWA), vergleiche [2, p. 240], [67, p. 345], [77, p. 256] wird definiert durch

$$(a\oplus_q b)^n\equiv\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q a^k b^{n-k},\ n=0,1,2,\ldots. \tag{30}$$

Dazu definieren wir die q-Subtraktion durch

$$x\ominus_q y\equiv x\oplus_q(-y). \tag{31}$$

Es gibt auch eine zu NWA duale q-Addition, die im folgenden Abschnitt dargestellt wird.

Folgendes Polynom in 3 Variablen stammt von Gauss [29, p. 462].

Definition 7. Die Jackson–Hahn–Cigler q-Addition (JHC), vergleiche [9, p. 91], [46, p. 362], [55, p. 78] ist die Funktion

$$\begin{aligned}(x \boxplus_q y)^n \equiv [x+y]_q^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}}\, y^k x^{n-k} = \\ x^n(-\frac{y}{x};q)_n \equiv P_{n,q}(x,y),\ n=0,1,2,\ldots,\end{aligned} \tag{32}$$

wobei

$$(x \boxminus_q y)^n \equiv P_{n,q}(x,-y),\ n=0,1,2,\ldots. \tag{33}$$

Entgegen der Ward–AlSalam q–Addition, ist die Jackson–Hahn q–Addition weder kommutativ noch assoziativ, jedoch kann sie als ein endliches Produkt geschrieben werden.

Gauss hat [29, XI, XII p.127] die trigonometrischen Funktionen auf die folgende Weise definiert:

$$\sin(x) \equiv\ x\ {}_2F_1(k,k';\tfrac{3}{2};-\frac{x^2}{4kk'}). \tag{34}$$

$$\cos(x) \equiv\ {}_2F_1(k,k';\tfrac{1}{2};-\frac{x^2}{4kk'}), \tag{35}$$

wo k, k' unendlich grosse reelle Zahlen sind. Dass Gauss diese Form gewählt hat, zeigt seine Vorliebe für die hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1$. Wir werden sehen, dass diese Form hervorragend mit den Gleichungen (40)-(43) zusammenpasst.

Definition 8. Die 4 kleinen q-trigonometrischen Funktionen werden definiert wie folgt:

$$\sin_q(x) \equiv \frac{1}{2i}(e_q(ix) - e_q(-ix)), \qquad |x|<1, \tag{36}$$

$$\cos_q(x) \equiv \frac{1}{2}(e_q(ix) + e_q(-ix)), \qquad |x|<1, \tag{37}$$

$$\sin_{\frac{1}{q}}(x) \equiv \frac{1}{2i}(e_{\frac{1}{q}}(ix) - e_{\frac{1}{q}}(-ix)), \tag{38}$$

$$\cos_{\frac{1}{q}}(x) \equiv \frac{1}{2}(e_{\frac{1}{q}}(ix) + e_{\frac{1}{q}}(-ix)), \tag{39}$$

wo $x \in \mathbb{C}$ in den zwei letzten Gleichungen.

Satz 1.4. *Diese q-trigonometrische Funktionen können auch in folgender Form dargestellt werden:*

$$\sin_q(x) = \frac{x}{1-q}\ {}_4\phi_3(\infty,\infty,\infty,\infty;\tfrac{3}{2},\widetilde{1},\widetilde{\tfrac{3}{2}}|q;-x^2), \tag{40}$$

$$\cos_q(x) = \ {}_4\phi_3(\infty,\infty,\infty,\infty;\tfrac{1}{2},\widetilde{1},\widetilde{\tfrac{1}{2}}|q;-x^2), \tag{41}$$

$$\sin_{\frac{1}{q}}(x) = \frac{x}{1-q}\ {}_0\phi_3(-;\tfrac{3}{2},\widetilde{1},\widetilde{\tfrac{3}{2}}|q;-x^2q^3), \tag{42}$$

$$\cos_{\frac{1}{q}}(x) = \ {}_0\phi_3(-;\tfrac{1}{2},\widetilde{1},\widetilde{\tfrac{1}{2}}|q;-x^2q). \tag{43}$$

Der Grund für die schnellere Konvergenz in den zwei letzten Reihen ist der quadratische q-Factor, genau wie für die theta-Funktionen.

Satz 1.5. *Die folgenden zwei Addition-Theoreme gelten* [54, p. 32]*,* [27, p. 34]*:*

$$\cos_q(x)\cos_{\frac{1}{q}}(y) + \sin_q(x)\sin_{\frac{1}{q}}(y) = \cos_q(x \boxminus y)_q, \tag{44}$$

$$\sin_q(x)\cos_{\frac{1}{q}}(y) + \cos_q(x)\sin_{\frac{1}{q}}(y) = \sin_q(x \boxplus y)_q. \tag{45}$$

Satz 1.6. *Die Addition-Theoreme mit der NWA- q-Addition sind*

$$\cos_q(x)\cos_q(y) + \sin_q(x)\sin_q(y) = \cos_q(x \ominus_q y). \tag{46}$$

$$\cos_q(x)\cos_q(y) - \sin_q(x)\sin_q(y) = \cos_q(x \oplus_q y). \tag{47}$$

$$\sin_q(x)\cos_q(y) + \sin_q(y)\cos_q(x) = \sin_q(x \oplus_q y). \tag{48}$$

$$\sin_q(x)\cos_q(y) - \sin_q(y)\cos_q(x) = \sin_q(x \ominus_q y). \tag{49}$$

Die Geschichte der trigonometrischen Funktionen geht auf die frühen Araber zurück, und viele Bezeichnungen wurden benutzt. Z.B. hat Viète die ersten Produkt-theoreme gefunden, und dadurch Descartes zur weiteren Forschung in Algebra beinflusst. Die modernen Bezeichnungen kamen erst 1748 durch Euler. Wir werden ein analoges System vorschlagen für die Jacobi-Gudermann elliptischen Funktionen, und zeigen, dass dies auch die Weierstrass elliptischen Funktionen enthält.

2. Die kombinatorische Schule und Christoph Gudermann

Das Ziel der kombinatorischen Schule war, Funktionen in Potenzreihen zu entwickeln nach der Taylorschen Formel. Die Taylorsche Formel wurde ursprünglich mit endlichen Differenzenquoten formuliert, sogenannte Fluxionen. Es gab vorher zwei Bezeichnungen für endliche Differenzen nach Taylor und Cousin. Statt dessen hat Hindenburg 1795 in *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* [52, p. 94] die Bezeichnung $\overset{k}{y}$ eingeführt.

Arbogast hat 1800 vorgeschlagen, ein D (Ableitung) statt des kleinen $\frac{dy}{dx}$ von Leibniz zu schreiben, um die Bezeichnung zu vereinfachen. Dies hatte einen Haupteinfluss auf die Entwicklung in England und in Deutschland. Dies kann von den unterschiedlichen Bezeichnungen in zwei Publikationen von Hindenburg gesehen werden. In 1795 enthielt die Zeitschrift *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* einige Arbeiten über das Taylor Theorem, das durch einen Differenzenoperator ausgedrückt wurde. Jedoch 1803 verwendete Hindenburg [53, p. 180] auch das Symbol D und bemerkte offenbar den Unterschied zwischen den zwei. Die obengennante Zeitschrift enthielt auch einige militärische Berichte, u.a. von Lambert; Hindenburg war ja auch Physiker. Wir werden sehen, dass das einen starken Einfluss auf Gudermann hatte.

Christof Gudermann (1798-1852), durch seine enge Freundschaft mit Crelle gefördert, war erst Gymnasiallehrer in Cleve, später Prof. in Münster. Er hat erst auf Deutsch geschrieben, und später abwechselnd auf Lateinisch, das die gemeinsame wissenschaftliche Sprache der damaligen Zeit war, und konnte deshalb internationale Reichweite erreichen. Gudermann hat ein ausgezeichnetes Lateinisch geschrieben in einer Zeit, worin das Lateinisch in Europa schon rückläufig war.

Crelle hat sich sehr für die damaligen mathematischen Fragestellungen intressiert, und konnte Verleger für Gudermann's Lehrbücher finden.

Gudermann selbst hatte eine entscheidende Bedeutung als Lehrer von Karl Weierstrass. Es wird berichtet, dass dreizehn Zuhörer zur ersten Vorlesung von Gudermann über elliptischen Funktionen gekommen sind. Am Ende des Semesters war nur einer geblieben, nämlich Weierstrass. Gudermann war einer der ersten, der Weierstrass' ausserordentliche mathematische Begabung entdeckt hat. Weierstrass wurde von Gudermann's Theorien über Reihenentwicklungen inspiriert und hat oft seine grosse Dankbarkeit für seinen alten Lehrer ausgedrückt, und Weierstrass hat seinerseits die kombinatorische Schule von Gudermann weiterentwickelt und modifiziert.

Riemann wurde wahrscheinlich auch von Gudermann beeinflusst ; in seinem Lehrbuch über elliptischen Funktionen [70] findet man die Reihen (54)-(56) mit den Bezeichnungen von Gudermann. Dieses Buch enthält die Riemannschen Vorlesungen 1855-56 und 1861-62.

Durch Lambert beeinflusst, der die hyperbolischen Funktionen eingeführt hat, hat Gudermann u.a. die Funktion $\frac{1}{\cosh(x)}$ nach Potenzen von x entwickelt, und hat sich dabei den Arbeiten Scherk's über die sogenannten Eulerschen Zahlen bedient. Die Gudermannschen Bezeichnungen für die trigonometrischen Funktionen haben viele Nachfolger gehabt bis zum Jahre 1908 [8, p. 173].

Gudermann hat das Summenzeichen von Rothe benutzt und auch ein Produktsymbol für $\sin x$ und $\cos x$ als unendliche Produkte [41, p. 68].

Interessant in diesem Zusammenhang ist, dass Rothe und Schweins das q-Binomial-Theorem erst formuliert haben, aber ohne Beweis. Das q-Binomial-Theorem ist eine allgemeinere Formel als die zwei Eulerschen Formeln (27), (28).

Christian Kramp (1760–1826) hat die Bezeichnung D von Arbogast übernommen und 1808 weiterentwickelt. Die kombinatorische Schule von Vandermonde und Kramp genoss eine Popularität in den Jahren 1772-1856. Das Ziel war die sogennanten Fakultäten in vier Klassen einzuteilen: positiven, negativen, ganzen und gebrochenen Exponenten. Jede Klasse hatte ihre einige Gesetze, ähnlich wie für die q–Faktorielle (3). Bessel hat die von Kramp aufgefasste Idee in seiner ausführlichen Abhandlung verbessert, und schliesslich hat Weierstrass 1856 die Fakultäten auf komplexe Ebene gebracht.

Gudermann hat sehr oft seine Funktionen nach Taylors Formel entwickelt; dabei hat er einen Vorläufer von Pochhammers Symbol benutzt – in Kramp's Notation verkleidet.

Man könnte sagen, dass der Kreis um Gudermann eine eigene Schule gebildet hat. Diese Schule bestand u.a. aus Johann August Grünert (1797–1872), Redaktor von *Archiv der Mathematik und Physik*, das 1841 angefangen hat, und Oscar Schlömilch (1823–1901), Redaktor von *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, das 1856 angefangen hat. Diese zwei Zeitschriften unterschieden sich von Crelle's Journal, das ein mehr rein mathematisches Gepräge hatte. Grünert, Mathematiker und Physiker, übernahm auch die Vollendung des Wörterbuches von Klügel und die Ausarbeitung zweier Supplementbände. Er war Schüler von Pfaff und Gauss, hat früh u.a. über Fakultätenreihen geschrieben, und dabei Tabellen über die Stirlingschen Zahlen [38, p. 71], [39, p. 279] gemacht. Die Stirlingschen Zahlen wurden später [79, p. 210] in Reihenenwicklungen für Bernoullischen Funktionen benutzt. Fast 39 Jahre lang arbeitete Grünert als ordentlicher Professor in Greifswald, wo er 1825 ein mathematisches Seminar gründete, und auch seine private Bibliothek seinen Studenten zur Verfügung stellte.

Die Gudermann–Grünert–Schlömilch Schule hatte auch anderswo Anhänger gefunden. Einige von ihnen waren, von der ersten und zweiten Generation, Sonine, Schläfli, Ettingshausen, J. Petzval (1807–1891)

[30], Gegenbauer, F. Neumann, Beltrami und F. Rogel. ; ebenfalls in Schweden, Malmsten und Björling, die beide zum Grünert Archiv beigetragen haben. Diese Zeitschrift enthielt auch Veröffentlichungen über hyperbolische Funktionen und sphärische Trigonometrie. Das letzte Gebiet ist eine moderne Bezeichnung für analytische Sphärik, die in [40] behandelt wurde. Wir werden später zurückkommen auf Beiträge über elliptische Funktionen im Grünert Archiv.

Man könnte sagen, dass dies ein früher Beginn des AMS 33 (Spezielle Funktionen mit Anwendungen) in Europa war.

Grünert hatte einen Konflikt mit Grassmann 1862, deshalb wird sein Name nicht erwähnt in Klein's eminentem Buch [59]; Klein behandelt auch Gudermann stiefmütterlich.

Ungefähr um 1853, als Grünert 56 war, hat das *Archiv der Mathematik und Physik* begonnen nachzulassen. Nach dem Tod von Grünert 1872 hat Reinhold Hoppe (1816–1900) die Redaktion übernommen.

Gudermann hat zum ersten Mal die folgende Reihenentwicklung für cn u gefunden:

$$[43, p.224], [72] \quad \mathrm{cn}\, u = 1 - \frac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2)\frac{u^4}{4!} - \dots \tag{50}$$

Gudermann hat als erster die elliptischen Funktionen in Fourierreihen auf zwei verschiedene Weisen entwickelt in seinem Buch [43]. In diesem Buch wird eine systematische Zusammenstellung der damaligen Kenntnis der elliptischen Funktionen gegeben. Danach hat Gudermann in weiteren Papers in Crelle seine elliptischen Funktionen für andere Zwecke eingesetzt z.B. für differentialgeometrische Anwendungen (curvis catenariis) 1846 und Untersuchungen über das sphärische Pendel 1849. Gudermann wollte deshalb auch eine dritte Monographie über die speziellen Funktionen schreiben, aber statt dessen hat er am Ende seines Lebens ein militärisches Buch [44] geschrieben. Für die wissenschaftliche Forschung ist es schade, dass Gudermann so früh gestorben ist, aber sein Geist lebt weiter in Eagle's Buch, wie wir sehen werden.

Die Fourierreihen für elliptische Funktionen von Jacobi-Gudermann-Glaisher sind verbreitet in Frankreich. In der Französischen Übersetzung von Greenhill [37, p. 438] werden diese Reihen nur erwähnt, mit dem Hinweis, dass sie viele Anwendungen in der Physik haben. In Hermite [51, p. 242-243] stehen die 22 Fourierreihen, die wir bald vorstellen werden, aber in etwas anderer Form. In Laurent's Lehrbuch [63, p. 120] werden diese Fourierreihen präsentiert. Zwei Fourierreihen stehen auch in [64, p. 412]. In dem Buch von Halphen [47] findet man einige von diesen Reihenentwicklungen in anderer Notation. In [69] wird die Gudermannsche Notation auch benutzt.

Die Fourierreihen für elliptische Funktionen kommen auch vor in dem Italienischen Lehrbuch von Bellacchi [4, p. 288], wo die Reihen (109), (110),(111), (112), (90), (92), und (94) stehen.

Auch in dem elementären Lehrbuch von Durège [14], das in mehreren Auflagen erschienen ist, erkennt man deutlich den Einfluss von Gudermann. Weitere Beiträge über elliptische Funktionen, die von Gudermann beeinflusst worden sind, findet man in [10], [11], [12], [75].

Da die elliptischen Funktionen eine grosse Bedeutung für die Mathematik im neunzehnten Jahrhundert hatte, darf eine historische Übersicht der Mathematik dieses Jahrhunderts dieses Thema nicht ausser Acht lassen. In der historischen Übersicht [13, p. 58] stehen die Fourierreihen (54) und (56), der Name Gudermann wird aber nicht erwähnt.

Die erste akademische Position von Leo Königsberger (1837-1921) war in Greifswald 1864-1869. Während dieser Zeit hat Königsberger 1868 ein Buch und 1869 eine Veröffentlichung [60] über elliptische Funktionen geschrieben, wo man den Einfluss von Gudermann erkennen kann. Während seiner Zeit in Heidelberg 1869-1875, als Sonya Kowalewski's erster Lehrer auf dem Gebiet elliptischer Funktionen, hat Königsberger 1874 ein weiteres Buch zu diesem Thema geschrieben, das aber mehr auf der Riemannschen Funktionentheorie baut.

Alfred Enneper (1830-1885), der den monumentalen historischen Übersicht über elliptische Funktionen [17] geschrieben hat, hat Gudermann's Arbeit auf diesem Gebiet sehr hervorgehoben [16, p. 535]. Die Gleichungen (54), (55), (56) (64), (62), (59),(91), (93), (57),(65), (58), (63) befinden sich auf [16, p. 122 (14)-(16), p.124 (29)- p. 125 (37)].

Martin Krause (1851–1920) hat zwei Bücher über doppelt-periodische Funktionen publiziert. Im ersten Band [61, p. 100] stehen die wichtigsten Fourierreihen für elliptische Funktionen. Krause hat auch eine Arbeit über sogenannte hyperelliptische Funktionen veröffentlicht. Friedrich Prym (1841–1915) hat die hyperelliptischen Funktionen eingeführt und eine bedeutende Forschung auf dem Gebiet der Thetafunktionen geleistet zusammen mit Adolf Krazer (1858-1926). Die Thetafunktionen sind sehr wichtig in der mathematischen Physik.

Eagle hat in 1958 [15] einen ersten Versuch gemacht, die elliptischen Funktionen in kanonischer Form zu definieren, damit sie den trigonometrischen Funktionen ähneln. Eagle's Buch hat eine glänzende Rezension bekommen, aber wurde danach nicht weiter verfolgt. Eagle schreibt alle elliptische Funktionen als Potenzreihen auf zwei verschiedenen Weisen; die erste mit horisonteller Polen und die zweite mit vertikaler Polen, genau wie Gudermann. Auf dieser Weise kann man die Reihe mit der schnellsten Konvergenz wählen, denn dies hängt vom Verhältnis $\frac{K}{K'}$ ab. Im besten Falle braucht man nur zwei Terme um eine Genauigkeit von 0.2% zu bekommen. Damit trat Eagle in die Fusstapfen von Gudermann, ohne es zu wissen. Ein Mangel in Eagle's Darstellung ist, dass es keine Normierung gibt im Vergleich zu Jacobis und Gudermann's Funktionen, wodurch es eben eine rein konzeptuelle Darstellung wird. Neville's Darstellung [68] hat denselben Mangel. Neville [68, p. 67 ch.3, p. 180 ch. 11.] und Glaisher sagen dazu implizit, dass es nur 12 Jacobische elliptische Funktionen gibt. Wir werden sehen, dass dies nicht der Fall ist, und dass schon Gudermann und Hermite dies gewusst haben. Glaisher hat dann eine Notation eingeführt, die sagt

(1) Die Inverse $\frac{1}{\mathrm{sn}}$ wird mit ns bezeichnet u.s.w.
(2) Die Quote $\frac{\mathrm{sn}}{\mathrm{cn}}$ wird mit sc bezeichnet u.s.w.

Diese Notation an sich ist ganz einleuchtend, wir werden bald darauf zurückkommen.

3. Elliptische Funktionen

Gudermann hat die moderne Bezeichnungen für die elliptischen Funktionen eingeführt und auch dessen q-Reihen, zusammen mit Jacobi. Diese q-Reihen sind aber in Vergessenheit geraten, obwohl sie wieder etwa 1880 in England durch die detailierten Arbeiten von Glaisher [36] wiederentdeckt worden sind. Dazu hat Heine einen Versuch gemacht, diese Theorie wieder zu beleben in seinem Buch [50]. Heine hat auch einen Brief an Dirichlet über dieses Thema [48] geschrieben.

Die folgende Tabelle illustriert die verschiedenen Bezeichnungen für elliptische Funktionen.

Abel[1]	*Jacobi*[56]	*Glaisher*[31]	*Gudermann*[43]	*Eagle*[15]
φ	sin am	sn	sn	SN
f	cos am	cn	cn	CN
F	$\triangle$ am	dn	dn	DN
	sin coam	cd	snc	CD
	cos coam	k' sd	cnc	
		sc	tn	SC
		$\frac{\mathrm{cs}}{k'}$	tnc	
		k' nd	dnc	

Bemerkung 3. Es gibt auch heutzutage die Möglichkeit auf Internet zu schauen, um aktuelle Auskunft zu bekommen. Da gibt es z.B. die Seite von Ralf Hoppe: *Elliptische Integrale und Funktionen nach Jacobi*, und die Seite von Wolfram Research, wo die Standardfunktion JacobiSN[z,m] heisst, mit $m = k^2$. Auf der letzten Seite stehen auch Differentialgleichungen für die 12 Glaisherschen elliptischen Funktionen, die sonst in der Literatur schwer zugänglich sind.

$2K, 4K$ und $2K', 4K'$ bezeichnen wie gewöhnlich die Perioden der Jacobischen elliptischen Funktion. Pringsheim [71] hat gezeigt, dass $\frac{K'}{K}$ immer reel ist, was in diesem Zusammenhang wichtig ist.

Die folgende Gleichung [3, p. 156] ist allgemein bekannt:

$$K = \frac{\pi}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \right)^2 k^{2l}. \tag{51}$$

Definition 9. Wir werden jetzt eine Grösse q einführen, die sehr klein ist wenn $K' > K$. Wir setzen $q \equiv e^{-\pi \frac{K'}{K}}$. Überall gilt $x \equiv \frac{u\pi}{2K}$.

Der interessierte Leser kann folgende Gleichungen vergleichen mit der Aussage von F. Klein in seinem Buch über hypergeometrische Funktionen: Es ist das gleiche Verhältnis zwischen den hypergeometrischen Funktionen und den trigonometrischen Funktionen wie zwischen den q-hypergeometrischen Funktionen und den elliptischen Funktionen.

Satz 3.1. *In den Gleichungen (57),(58), (60),(61), (63), (65) gilt*

$$-\pi \frac{K'}{K} < \mathrm{Im}(x) < \pi \frac{K'}{K}. \tag{52}$$

In den Gleichungen (54), (55),(56), (59),(62), (64) gilt

$$-\frac{\pi}{2}\frac{K'}{K} < \mathrm{Im}(x) < \frac{\pi}{2}\frac{K'}{K}. \tag{53}$$

Die erste Formel stammt von Heine [50, p. 99]*, sie steht auch in* [18, p. 196]*. Die dritte wird angedeutet in Heine* [50, p. 100]*. Die drei ersten Formeln stehen in vollständiger Form, aber mit anderen Bezeichnungen in* [49, p. 132]*. Alle 12 Formeln stehen in anderer Form in Glaisher* [31, p. 57-58]*. Wir haben die Reihenfolge von* [31] *behalten. 10 von den Formeln stehen auch in Fundamenta* [56, & 39]*, wie angegeben. Die Reihenentwicklung (60) wurde später in* [58, p. 102] *und in* [65, p. 282 (19)] *veröffentlicht.*

$$[56,\ (19)]\ \mathrm{sn}\ u = \frac{2\pi}{Kk} \mathrm{Im} \left(\frac{q^{\frac{1}{2}} e^{ix}}{1-q}\ {}_2\phi_1(1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2} | q^2; q e^{2ix}) \right). \tag{54}$$

$$[56, (21)]\ \mathrm{cn}\ u=\frac{2\pi}{Kk}\mathrm{Re}\left(\frac{q^{\frac{1}{2}}e^{ix}}{1+q}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{\tfrac{1}{2}};\widetilde{\tfrac{3}{2}}|q^2;qe^{2ix})\right). \tag{55}$$

$$[56, (25)]\ \mathrm{dn}\ u=\frac{\pi}{2K}\mathrm{Re}\left(-1+2\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q^2;qe^{2ix})\right). \tag{56}$$

$$\begin{split}[56, (18)]\ \frac{1}{\mathrm{sn}\ u}=\frac{\pi}{2K}\times\\ \left[\frac{1}{\sin\ x}+\mathrm{Im}\left[e^{ix}\frac{4q}{1-q}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^2;q^2e^{2ix})\right]\right].\end{split} \tag{57}$$

$$\begin{split}[56, (20)]\ \frac{1}{\mathrm{cn}\ u}=\frac{\pi}{2Kk'}\times\\ \left[\frac{1}{\cos\ x}-\mathrm{Re}\left[e^{ix}\frac{4q}{1+q}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{\tfrac{1}{2}};\widetilde{\tfrac{3}{2}}|q^2;-q^2e^{2ix})\right]\right].\end{split} \tag{58}$$

$$[56, (26)]\ \frac{1}{\mathrm{dn}\ u}=\frac{\pi}{2Kk'}\mathrm{Re}\left(-1+2\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q^2;-qe^{2ix})\right). \tag{59}$$

$$[7, \text{p. } 139\ (1)]\ \frac{\mathrm{sn}\ u}{\mathrm{cn}\ u}=\frac{\pi}{2Kk'}\left(\tan\ x-2+2\mathrm{Im}\left[\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q^2;-q^2e^{2ix})\right]\right). \tag{60}$$

$$[65, \text{p. } 282\ (20)]\frac{\mathrm{cn}\ u}{\mathrm{sn}\ u}=\frac{\pi}{2K}\left(\cot\ x+2-2\mathrm{Im}\left[\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q^2;q^2e^{2ix})\right]\right). \tag{61}$$

$$[56, (23)]\ \frac{\mathrm{sn}\ u}{\mathrm{dn}\ u}=\frac{\pi}{Kkk'}\frac{2q^{\frac{1}{2}}}{1+q}\mathrm{Im}\left[e^{ix}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{\tfrac{1}{2}};\widetilde{\tfrac{3}{2}}|q^2;-qe^{2ix})\right]. \tag{62}$$

$$\begin{split}[56, (22)]\ \frac{\mathrm{dn}\ u}{\mathrm{sn}\ u}=\frac{\pi}{2K}\times\\ \left[\frac{1}{\sin\ x}-\mathrm{Im}\left[e^{ix}\frac{4q}{1+q}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{\tfrac{1}{2}};\widetilde{\tfrac{3}{2}}|q^2;q^2e^{2ix})\right]\right].\end{split} \tag{63}$$

$$[56, (15)]\ \frac{\mathrm{cn}\ u}{\mathrm{dn}\ u}=\frac{2\pi}{Kk}\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\mathrm{Re}\left[e^{ix}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^2;-qe^{2ix})\right]. \tag{64}$$

$$\begin{split}[56, (14)]\ \frac{\mathrm{dn}\ u}{\mathrm{cn}\ u}=\frac{\pi}{2K}\times\\ \left[\frac{1}{\cos\ x}+\mathrm{Re}\left[e^{ix}\frac{4q}{1-q}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^2;-q^2e^{2ix})\right]\right].\end{split} \tag{65}$$

Bemerkung 4. Diese Reihen stehen in anderer Form auch in [43, p. 367 (1), p. 368 (9), p. 368 (17),p. 367 (5), p. 368 (13), p. 368 (18), p. 368 (21), p. 368 (22), p. 368 (10),p. 368 (14), p. 367 (2), p. 367 (6),]. Die meisten von diesen Formeln sind auch zu finden in den Büchern von Durège [14], und Broch [6]. Eagle hat sie formuliert mit einer anderen

Normierung in [15, p. 3 (1), p. 4 (2), p. 4 (3), p. 7 (10), p. 7 (8), p. 6 (6), p. 7 (9), p. 7 (12), p. 6 (5), p. 7 (11), p. 6 (4), p. 7 (7)].

Bemerkung 5. Whittaker & Watson [78, p. 511] geben einige von den obigen Reihen, aber mit dem Unterschied, dass $\frac{K'}{K}$ nicht immer reell ist. Neville hat sie formuliert mit den Bezeichnungen von Glaisher in [68, p. 285-286]. Neville nimmt dazu an, dass $\frac{K'}{K}$ nicht immer reell ist.

Bemerkung 6. Es scheint, dass Gauss 1799 die Fourier-Reihe für sn u angegeben hat, aber mit ganz anderen Bezeichnungen [29, p. 433], [45, p. 99]. Die näheren Umständen über diese Tatsache sind aber unklar, da in [29, p. 433] fast kein Text steht, und die Möglichkeit von Schreibfehlern nicht ausgeschlossen ist. Trotzdem wäre das eine hervorragende Leistung des zweiundzwanzig-jährigen Gauss. Es ist durchaus möglich, dass Jacobi oder Gudermann von dieser Veröffentlichung gewusst hat.

Bemerkung 7. In 1828 hat Abel [1, p. 350, p. 473] auch die Fourier-Reihen für sn u und cn u angegeben, aber mit seinen eigenen Bezeichnungen. Eine ausführliche Diskussion von den Konvergensfragen in Abel's bedeutenden Arbeiten über elliptische Funktionen findet man in [66] und in [6].

Es gibt, wie schon Gudermann entdeckt hat, eine zweite q-Reihenentwicklung für die obigen Funktionen. Diese Reihenentwickung geht von der imaginären Periode aus. Glaisher [36, p. 18] hat diese zweite Entwickung unabhängig gefunden, zusammen mit den Reihenentwickungen für die 4 Zeta-Funktionen.

Wir werden jetzt die Formeln für diese zweite Reihenentwickung aufschreiben. Wir beginnen mit den endlichen Formeln, dann folgen dieselben Formeln in Heine's Notation. Wir setzen $p \equiv e^{-\pi \frac{K}{2K'}}$ [43, p. 342], und $y \equiv \frac{u\pi}{2K'}$.

Satz 3.2. *Die folgenden 12 Reihen definieren die zweite Reihenentwicklung der el. Funktionen.*

$$[43, p.366(6), p.367(3)]\ \mathrm{sn}\ u = \frac{\pi}{2K'k}\left[\tanh\ y - \frac{4p^4 \sinh\ 2y}{1+p^4} + \frac{4p^8 \sinh\ 4y}{1+p^8} - \ldots\right]. \tag{66}$$

$$[43, p.366(4), p.368(11)]\ \mathrm{cn}\ u = \frac{\pi}{2K'k}\left[\frac{1}{\cosh\ y} - \frac{4p^2 \cosh\ y}{1+p^2} + \frac{4p^6 \cosh\ 3y}{1+p^6} - \ldots\right]. \tag{67}$$

$$[43, p.366(5), p.368(19)] \ \mathrm{dn}\ u = \frac{\pi}{2K'}\left[\frac{1}{\cosh\ y} + \frac{4p^2\cosh\ y}{1-p^2} - \frac{4p^6\cosh\ 3y}{1-p^6} + \ldots\right]. \tag{68}$$

$$[43, p.366(3), p.367(7)] \ \frac{1}{\mathrm{sn}\ u} = \frac{\pi}{2K'}\left[\frac{1}{\tanh\ y} + \frac{4p^4\sinh\ 2y}{1+p^4} + \frac{4p^8\sinh\ 4y}{1+p^8} + \ldots\right]. \tag{69}$$

$$[43, p.366(7), p.368(15)] \ \frac{1}{\mathrm{cn}\ u} = \frac{2\pi}{K'k'}\left[\frac{p\cosh\ y}{1+p^2} + \frac{p^3\cosh\ 3y}{1+p^6} + \ldots\right]. \tag{70}$$

$$[43, p.367(11), p.368(20)] \ \frac{1}{\mathrm{dn}\ u} = \frac{2\pi}{K'k'}\left[\frac{p\cosh\ y}{1-p^2} - \frac{p^3\cosh\ 3y}{1-p^6} + \ldots\right]. \tag{71}$$

$$[43, p.366(8), p.368(23)] \ \frac{\mathrm{sn}\ u}{\mathrm{cn}\ u} = \frac{2\pi}{K'k'}\left[\frac{p\sinh\ y}{1-p^2} + \frac{p^3\sinh\ 3y}{1-p^6} + \ldots\right]. \tag{72}$$

$$[43, p.368(24)] \ \frac{\mathrm{cn}\ u}{\mathrm{sn}\ u} = \frac{\pi}{2K'}\left[\frac{1}{\sinh\ y} - \frac{4p^2\sinh\ y}{1-p^2} - \frac{4p^6\sinh\ 3y}{1-p^6} - \ldots\right]. \tag{73}$$

$$[43, p.367(10), p.368(12)] \ \frac{\mathrm{sn}\ u}{\mathrm{dn}\ u} = \frac{2\pi}{K'kk'}\left[\frac{p\sinh\ y}{1+p^2} - \frac{p^3\sinh\ 3y}{1+p^6} + \ldots\right]. \tag{74}$$

$$[43, p.365(1), p.368(16)] \ \frac{\mathrm{dn}\ u}{\mathrm{sn}\ u} = \frac{\pi k'}{2K'k}\left[\frac{1}{\sinh\ y} + \frac{4p^2\sinh\ y}{1+p^2} + \frac{4p^6\sinh\ 3y}{1+p^6} + \ldots\right]. \tag{75}$$

$$[43, (p.367(4)), p.367(12)] \ \frac{\mathrm{cn}\ u}{\mathrm{dn}\ u} = \frac{\pi}{2K'k}\left[1 - \frac{4p^2\cosh\ 2y}{1+p^4} + \frac{4p^4\cosh\ 4y}{1+p^8} + \ldots\right]. \tag{76}$$

$$[43, p.366(9), p.367(8)]\ \frac{\text{dn } u}{\text{cn } u} = \frac{\pi}{2K'}\left[1 + \frac{4p^2 \cosh\ 2y}{1+p^4} + \frac{4p^4 \cosh\ 4y}{1+p^8} + \ldots\right]. \tag{77}$$

Bemerkung 8. Die Gleichung (66) hat einen kleinen Fehler in [36, 13]. Alle andere Gleichungen stehen in [36].

Satz 3.3. *Diese 12 Reihen können nach Heine wie folgt ausgedrückt werden. Um eine symmetrische Form zu behalten, setzen wir nach Jacobi und Glaisher* $q' \equiv e^{-\pi\frac{K}{K'}}$.

$$\text{sn } u = \frac{\pi}{2K'k}\left[\tanh\ y - i\text{Im}\left(-2 + 2\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{0}; \widetilde{1}|q'^2; -q'^2 e^{-2y})\right)\right]. \tag{78}$$

$$\text{cn } u = \frac{\pi}{2K'k}\left[\frac{1}{\cosh\ y} - \text{Re}\left[e^{-y}\frac{4q'}{1+q'}\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{\tfrac{1}{2}}; \widetilde{\tfrac{3}{2}}|q'^2; -q'^2 e^{-2y})\right]\right]. \tag{79}$$

$$\text{dn } u = \frac{\pi}{2K'}\left[\frac{1}{\cosh\ y} + \text{Re}\left(\frac{4q'e^{-y}}{1-q'}\ {}_2\phi_1(1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}| - q'^2; -q'^2 e^{-2y})\right)\right]. \tag{80}$$

$$\frac{1}{\text{sn } u} = \frac{\pi}{2K'}\left[\frac{1}{\tanh\ y} - i\text{Im}\left(-2 + 2\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{0}; \widetilde{1}|q'^2; q'^2 e^{-2y})\right)\right]. \tag{81}$$

$$\frac{1}{\text{cn } u} = \frac{2\pi}{K'k'}\text{Re}\left[\frac{q'^{\frac{1}{2}}e^{-y}}{1+q'}\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{\tfrac{1}{2}}; \widetilde{\tfrac{3}{2}}|q'^2; q'e^{-2y})\right]. \tag{82}$$

$$\frac{1}{\text{dn } u} = \frac{2\pi}{K'k'}\text{Re}\left[e^{-y}\frac{q'^{\frac{1}{2}}}{1-q'}\ {}_2\phi_1(1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}|q'^2; -q'e^{-2y})\right]. \tag{83}$$

$$\frac{\text{sn } u}{\text{cn } u} = \frac{-2\pi i}{K'k'}\text{Im}\left[\frac{q'^{\frac{1}{2}}e^{-y}}{1-q'}\ {}_2\phi_1(1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}|q'^2; q'e^{-2y})\right]. \tag{84}$$

$$\frac{\text{cn } u}{\text{sn } u} = \frac{\pi}{2K'}\left[\frac{1}{\sinh\ y} - i\ \text{Im}\left[e^{-y}\frac{4q'}{1-q'}\ {}_2\phi_1(1, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}|q'^2; q'^2 e^{-2y})\right]\right]. \tag{85}$$

$$\frac{\text{sn } u}{\text{dn } u} = \frac{-2\pi i}{K'kk'}\text{Im}\left[e^{-y}\frac{q'^{\frac{1}{2}}}{1+q'}\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{\tfrac{1}{2}}; \widetilde{\tfrac{3}{2}}|q'^2; -q'e^{-2y})\right]. \tag{86}$$

$$\frac{\text{dn } u}{\text{sn } u}=\frac{\pi k'}{2K'k}\left[\frac{1}{\sinh\ y}-i\ \text{Im}\left[e^{-y}\frac{4q'}{1+q'}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{\tfrac{1}{2}};\widetilde{\tfrac{3}{2}}|q'^2;q'^2e^{-2y})\right]\right]. \tag{87}$$

$$\frac{\text{cn } u}{\text{dn } u}=\frac{\pi}{2K'k}\left[-1+2\ \text{Re}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q'^2;-q'e^{-2y})\right]. \tag{88}$$

$$\frac{\text{dn } u}{\text{cn } u}=\frac{\pi}{2K'}\left[-1+2\ \text{Re}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q'^2;q'e^{-2y})\right]. \tag{89}$$

Satz 3.4. *Die nächsten 6 Formeln stehen auch in* [34, p. 138]. *Wir haben die Reihenfolge von* [34] *beibehalten.*

$$[56, \&\ 39\ (11)]\frac{\text{cn } u\ \text{dn } u}{\text{sn } u}=\frac{\pi}{2K}\left(\cot\ x+2-2\ \text{Im}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q;qe^{2ix})\right). \tag{90}$$

$$[56, \&\ 39\ (16)]\frac{\text{sn } u}{\text{cn } u\ \text{dn } u}=\frac{\pi}{2Kk'^2}\left(\tan\ x-2+2\ \text{Im}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q;-qe^{2ix})\right). \tag{91}$$

$$[56, \&\ 39\ (12)], [15, \text{p. } 8(14)]\frac{\text{sn } u\ \text{dn } u}{\text{cn } u}=\frac{\pi}{2K}\Big(\tan\ x+ \\ \text{Im}\left[\frac{4qe^{2ix}}{1-q}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^2;q^2e^{4ix})+2\left(-1+\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q^2;q^2e^{4ix})\right)\right]\Big). \tag{92}$$

$$[56, \&\ 39\ (17)], [15, \text{p. } 8(13)]\frac{\text{cn } u}{\text{sn } u\ \text{dn } u}=\frac{\pi}{2K}\Big(\cot\ x+ \\ \text{Im}\left[\frac{4qe^{2ix}}{1-q}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^2;q^2e^{4ix})+2\left(1-\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q^2;q^2e^{4ix})\right)\right]\Big). \tag{93}$$

$$[56, \&\ 39\ (13)], [15, \text{p. } 9(15)]\frac{\text{cn } u\ \text{sn } u}{\text{dn } u}= \\ \frac{\pi}{2Kk^2}\text{Im}\frac{8qe^{2ix}}{1-q^2}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^4;q^2e^{4ix}). \tag{94}$$

$$[51, \text{p. } 243\ (18)]\frac{\text{dn } u}{\text{sn } u\ \text{cn } u}=\frac{\pi}{2K}\left[\frac{2}{\sin\ 2x}+\text{Im}\frac{8q^2e^{2ix}}{1-q^2}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^4;q^4e^{4ix})\right]. \tag{95}$$

Bemerkung 9. Diese Reihen stehen auch in [7, p. 136 (1), p. 137 (7), p. 136 (2), p. 137 (8), p. 137 (3), p. 137 (9)]; und in anderer Form in [43, p. 362 (7)–(12)].

Es gibt dazu 6 duale Reihenentwickungen für die obigen Formeln, ähnlich wie für die 12 Nevillschen Funktionen, [43, p. 362 (1)–(6)].

Satz 3.5. *Reihen für Wurzelausdrücke der el. Funktionen* [43, p. 364 (7)–(12)].

$$k'\sqrt{\frac{\text{dn }u+\text{cn }u}{\text{dn }u-\text{cn }u}}=\frac{\pi}{2K}\left[\cot\ \frac{x}{2}+2-2\text{Im}\left[\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q;q^{\frac{3}{2}}e^{ix})\right]\right]. \tag{96}$$

$$k'\sqrt{\frac{\text{dn }u-\text{cn }u}{\text{dn }u+\text{cn }u}}=\frac{\pi}{2K}\left[\tan\ \frac{x}{2}-2+2\text{Im}\left[\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q;-q^{\frac{3}{2}}e^{ix})\right]\right]. \tag{97}$$

$$\sqrt{\frac{1-\text{cn }u}{1+\text{cn }u}}=\frac{\pi}{2K}\left[\tan\ \frac{x}{2}+\text{Im}\left[e^{2ix}\frac{4q^3}{1+q^2}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{1};\widetilde{2}|q^2;q^3e^{2ix})\right.\right.$$
$$\left.\left.+e^{ix}\frac{4q^{\frac{3}{2}}}{1-q}\ {}_2\phi_1(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2}|q^2;q^3e^{2ix})\right]\right]. \tag{98}$$

$$\sqrt{\frac{1+\text{cn }u}{1-\text{cn }u}}=\frac{\pi}{2K}\left[\cot\ \frac{x}{2}-\text{Im}\left[e^{2ix}\frac{4q^3}{1+q^2}\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{1};\widetilde{2}|q^2;q^3e^{2ix})\right.\right.$$
$$\left.\left.-e^{ix}\frac{4q^{\frac{3}{2}}}{1-q}\ {}_2\phi_1(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2}|q^2;q^3e^{2ix})\right]\right]. \tag{99}$$

$$k\sqrt{\frac{1-\text{dn }u}{1+\text{dn }u}}=\frac{4\pi}{K}\frac{q}{1-q^2}\text{Im}\left[e^{ix}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^4;q^2e^{2ix})\right]. \tag{100}$$

$$k\sqrt{\frac{1+\text{dn }u}{1-\text{dn }u}}=\frac{\pi}{K}\left[\frac{1}{\sin\ x}+\text{Im}\left[e^{ix}\frac{4q^3}{1-q^2}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^4;q^6e^{2ix})\right]\right]. \tag{101}$$

Die zwei ersten Funktionen sind wie leicht ersichtlich, $\frac{\text{cn}}{\text{sn}}(\frac{x}{2})$ und $\frac{\text{sn}}{\text{cn}}(\frac{x}{2})$.

Um ein Bisschen Ordnung in den Bezeichnungen für Thetafunktionen zu geben, schreiben wir die folgende Tabelle auf:

Jacobi[56], *Hermite*[51]	*Moderne Bezeichnung* [73]
H	θ_1
Θ	θ_4
H_1	θ_2
Θ_1	θ_3

Zwei von diesen Jacobischen Theta-Funktionen [73] können auf ähnlicher Weise geschrieben werden:

$$\theta_4(x,q) \equiv -1 + 2 \text{ Re } {}_1\phi_2(1;\infty,\infty|q;-qe^{2ix}), \tag{102}$$

$$\theta_1(x,q) \equiv 2 \text{ Im} \left[e^{ix} \ {}_1\phi_2(1;\infty,\infty|q;-qe^{2ix})\right]. \tag{103}$$

Wir kommen jetzt zu den *Zeta*- Funktionen, sie werden auf die gleiche Weise wie für die Weierstrass el. Funktionen definiert.

Definition 10. Die Jacobi *Zeta*- Funktion [56, & 47 (1)], [65, p. 293], wird definiert durch

$$Z(x) \equiv \frac{\theta_4(x,q)'}{\theta_4(x,q)}. \tag{104}$$

Die drei anderen *Zeta*- Funktionen werden auf ähnlicher Weise definiert:

$$Zc(x) \equiv \frac{\theta_2(x,q)'}{\theta_2(x,q)}, \tag{105}$$

$$Zd(x) \equiv \frac{\theta_3(x,q)'}{\theta_3(x,q)}, \tag{106}$$

$$Zs(x) \equiv \frac{\theta_1(x,q)'}{\theta_1(x,q)}. \tag{107}$$

Riemann hat in seinen Vorlesungen [70, p. 112] einige Eigenschaften, z.B. die Periodizität von $Z(x)$ hervorgehoben. Wir werden sehen, dass das von der folgenden Reihenentwicklung folgt. Zuerst ein Lemma.

Lemma 3.6. *Eine Fourierreihe für das logaritmische Potential.*

$$\ln(1-2q^{2k}\cos(2x)+q^{4k}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q^{2kn}}{n}\cos(2nx). \tag{108}$$

Satz 3.7. *Diese vier Zeta- Funktionen haben die folgenden Reihenentwicklungen.*

$$Z(x) = \text{Im}\left(\frac{4qe^{2ix}}{1-q^2}\ {}_2\phi_1(1,1;2|q^2;qe^{2ix})\right). \tag{109}$$

$$[4, p.288(41)] \ Zc(x) = -\tan\ x + 4\text{Im}\left(\frac{q^2e^{2ix}}{1-q^2}\ {}_2\phi_1(1,1;2|q^2;q^2e^{2ix})\right). \tag{110}$$

$$[4, p.288(42)] \ Zd(x) = -\text{Im}\left(4\frac{qe^{2ix}}{1-q^2}\ {}_2\phi_1(1,1;2|q^2;-qe^{2ix})\right). \tag{111}$$

[4, p.288(43)]

$$Zs(x) = \cot\ x + 4\mathrm{Im}\left(\frac{q^2 e^{2ix}}{1-q^2}\ {}_2\phi_1(1,1;2|q^2;q^2e^{2ix})\right). \tag{112}$$

Beweis. Alle 4 Beweise werden auf dieselbe Weise gemacht. Wir begnügen uns mit dem Beweis von (110).

$$\theta_2(x,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos(x)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+2q^{2k}\cos(2x)+q^{4k}). \tag{113}$$

$$\begin{aligned}\ln\theta_2(x,q) &= \ln\cos(x) + \ln 2 + \ln(q^{\frac{1}{4}}) + \sum_{k=1}^{\infty}\big[\ln(1+2q^{2k}\cos(2x)+q^{4k})\\ &+\ln(1-q^{2k})\big] = f(q) + \ln\cos(x) - \sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n q^{2kn}}{n}\cos(2nx).\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\ln\theta_2(x,q) = -\tan(x) + \sum_{n,k=1}^{\infty}4(-1)^n q^{2kn}\sin(2nx) =\\ &-\tan(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin(2nx).\end{aligned} \tag{115}$$

□

Diese Reihen stehen auch in Glaisher [35, p. 3], [32, p. 145], und in Böhm [5, p. 353]. Hermite hat [51, p. 243] die Reihen (109), (112) angegeben, und die Reihen (110), (111) mit Zeichenfehler angegeben. P. Appell und E. Lacour [3, p. 107] haben die vierte Reihe abgeleitet durch eine Konstruktion von einer Funktion mit denselben Polen und Residuen.

Unser nächstes Ziel ist, die zutreffenden Jacobischen Formeln für die elliptischen Integrale des Abschnitt 40 in Heineschen Funktionen auszudrücken. Man sieht hier eine schöne Symmetrie des Tilde-Operators.

Satz 3.8. [56, &40:4(I), 4(II), 5(I), 5(II), 6(I), 6(II)].

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + \frac{4q}{1-q}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^2;-q^2). \tag{116}$$

$$\frac{2K}{\pi} = -1 + 2\ {}_2\phi_1(1,\widetilde{0};\widetilde{1}|q^2;q). \tag{117}$$

$$\frac{2Kk}{\pi} = \frac{4q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\ {}_2\phi_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}|q^2;-q). \tag{118}$$

$$\frac{2Kk}{\pi} = \frac{4q^{\frac{1}{2}}}{1+q}\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{\tfrac{1}{2}}; \widetilde{\tfrac{3}{2}}|q^2; q). \tag{119}$$

$$\frac{2Kk'}{\pi} = 1 - \frac{4q}{1+q}\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{\tfrac{1}{2}}; \widetilde{\tfrac{3}{2}}|q^2; -q^2). \tag{120}$$

$$\frac{2Kk'}{\pi} = -1 + 2\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{0}; \widetilde{1}|q^2; -q). \tag{121}$$

Beweis. Wir setzen $u = 0$ in (65), (56), (64), (55), (58), (59). Oder wir setzen $u = K$ in (57), (59), (54), (62), (63), (56). □

Diese Reihen stehen in anderer Form in [43, p. 368-369], [7, p. 108, p. 110 (7)].

Satz 3.9. [56, &40:7(I), 7(II), 8(II), 9(II), 10(II), 11(II), 12(II), 13(II)].

$$\frac{2k'^{\frac{1}{2}}K}{\pi} = 1 - \frac{4q^2}{1+q^2}\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{\tfrac{1}{2}}; \widetilde{\tfrac{3}{2}}|q^4; -q^4). \tag{122}$$

$$\frac{2k'^{\frac{1}{2}}K}{\pi} = 1 - \frac{4q^2}{1+q^4}\ {}_2\phi_1(1, \widetilde{1}; \widetilde{2}|q^4; -q^2). \tag{123}$$

$$\begin{aligned}\frac{4K^2}{\pi^2} &= 1 + \frac{8q}{(1-q)^2}\ {}_3\phi_2(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}|q^2; q^2)\\ &+ \frac{8q^2}{(1+q^2)^2}\ {}_3\phi_2(1, \widetilde{1}, \widetilde{1}; \widetilde{2}, \widetilde{2}|q^2; q^2).\end{aligned} \tag{124}$$

$$\frac{4K^2k^2}{\pi^2} = \frac{16q(1+q^2)}{(1-q^2)^2}\ {}_4\phi_3(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \widetilde{\tfrac{3}{2}}; \widetilde{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}|q^4; q^2). \tag{125}$$

$$\frac{4K^2k'^2}{\pi^2} = 1 - \frac{8q}{(1+q)^2}\ {}_3\phi_2(1, \widetilde{1}, \widetilde{1}; \widetilde{2}, \widetilde{2}|q; -q). \tag{126}$$

$$\frac{4K^2kk'}{\pi^2} = \frac{4q^{\frac{1}{2}}(1-q)}{(1+q)^2}\ {}_4\phi_3(1, \tfrac{3}{2}, \widetilde{\tfrac{1}{2}}, \widetilde{\tfrac{1}{2}}; \widetilde{\tfrac{3}{2}}, \widetilde{\tfrac{3}{2}}, \tfrac{1}{2}|q^2; -q). \tag{127}$$

$$\frac{4K^2k'}{\pi^2} = 1 - \frac{8q^2}{(1+q^2)^2}\ {}_3\phi_2(1, \widetilde{1}, \widetilde{1}; \widetilde{2}, \widetilde{2}|q^2; -q^2). \tag{128}$$

$$\frac{4K^2k}{\pi^2} = \frac{4q^{\frac{1}{2}}(1+q)}{(1-q)^2}\ {}_4\phi_3(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \widetilde{\tfrac{3}{2}}; \widetilde{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}|q^2; q). \tag{129}$$

Satz 3.10. *Eine Formel für elliptische Integrale* [57], [42, p. 172]*:*

$$F^1E(\phi) - E^1F(\phi) = \frac{\pi}{K}\ \mathrm{Im}\left(\frac{2\pi q^{\frac{1}{2}}e^{ix}}{1-q}\ {}_2\phi_1(1, 1; 2|q; qe^{ix})\right). \tag{130}$$

Satz 3.11. *Formeln für* $\frac{4KE}{\pi^2}$ *etc. Glaisher* [33, p. 338] *sind:*

$$\frac{4KE}{\pi^2} = 1 + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2}\ {}_3\phi_2(1, \widetilde{1}, \widetilde{1}; \widetilde{2}, \widetilde{2}|q^2; q^2). \tag{131}$$

$$\frac{4KJ}{\pi^2} = \frac{8q}{(1-q)^2}\ {}_3\phi_2(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}|q^2; q^2). \tag{132}$$

$$\frac{4KG}{\pi^2} = \frac{8q}{(1+q)^2}\ {}_3\phi_2(1, \widetilde{\tfrac{1}{2}}, \widetilde{\tfrac{1}{2}}; \widetilde{\tfrac{3}{2}}, \widetilde{\tfrac{3}{2}}|q^2; q^2). \tag{133}$$

$$\frac{4K(J-G)}{\pi^2} = \frac{32q^2}{(1-q^2)^2}\ {}_3\phi_2(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}|q^4; q^4). \tag{134}$$

$$\frac{4K(E+G)}{\pi^2} = 1 + \frac{8q}{(1+q)^2}\ {}_3\phi_2(1, \widetilde{1}, \widetilde{1}; \widetilde{2}, \widetilde{2}|q; q). \tag{135}$$

$$\begin{aligned}\frac{4K(E-J)}{\pi^2} &= 1 - \frac{8q}{(1-q)^2}\ {}_3\phi_2(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}|q^2; q^2)+\\ &\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}\ {}_3\phi_2(1, \widetilde{1}, \widetilde{1}; \widetilde{2}, \widetilde{2}|q^2; q^2).\end{aligned} \tag{136}$$

4. Folgerung

Wir haben die zwei Fourierreihen für die 12 ersten und die Fourierreihen für die nächsten 6 Jacobi-Gudermann elliptischen Funktionen gezeigt zusammen mit den Reihen für die 4 Zeta Funktionen. Man weiss aber auch, dass die Weierstrass elliptischen Funktionen durch die Jacobi-Gudermann Funktionen ausgedrückt werden können [76, p. 30], [47, p. 431]. Deshalb haben wir unser Ziel erreicht, alle diese Funktionen als q-hypergeometrische Reihen auszudrücken.

Literatur

[1] N.H. Abel, *OEuvres completes de Niels Henrik Abel.* Christiana: Imprimerie de Grondahl and Son; New York and London: Johnson Reprint Corporation. 1965.

[2] W. A. Al-Salam, q-Bernoulli numbers and polynomials. *Math. Nachr.* **17** (*1959*), 239–260.

[3] P. Appell and E. Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques.* Paris: Gauthier-Villars et Fils. 1897.

[4] G.Bellacchi, *Introduzione storica alla teoria delle Funzioni ellittiche.* Firenze 1894.

[5] K. Boehm, *Elliptische Funktionen.* Erster Teil: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrcken entwickelt. Leipzig 1908.

[6] O.J. Broch, *Om de elliptiska funktioners Raekkeudvikling* Stockholm 1864.

[7] O.J.Broch, *Traité élémentaire des fonctions elliptiques.* Christiana 1867.

[8] F.Cajori, *A History of Mathematical Notations.* V2. Chicago 1929.

[9] J.Cigler, Operatormethoden für q-Identitäten. *Monatshefte für Mathematik* **88**(1979), 87-105.

[10] J.Dienger, Zurückführung des Integrals ... auf elliptische Funktionen. *Grünert Archiv* **11**(1848), 94-96.

[11] J.Dienger, *Grünert Archiv* **11** (1848), 395-418.

[12] J.Dienger, *Grünert Archiv* **13** (1849), 1-35.

[13] Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900. Tome II. (French) [A short history of mathematics 1700–1900. Vol. II] Fonctions elliptiques, analyse fonctionnelle, topologie, géométrie différentielle, probabilités, logique mathématique. Édité par Jean Dieudonné. Hermann, Paris, 1978.

[14] H.Durège, *Theorie der elliptischen Functionen.* Leipzig. Teubner. 1861.

[15] A.Eagle, *The elliptic functions as they should be: an account, with applications, of the functions in a new canonical form.* Galloway and Porter, Ltd., Cambridge, England 1958.

[16] V.Enneper, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Erste Auflage. Halle 1876.

[17] V.Enneper, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Zweite Auflage. Neu bearbeitet und herausgegeben von Felix Müller. Halle a. S. L. Nebert. 1890.

[18] A.Erdélyi , W.Magnusand F.Oberhettinger and F.G.Tricomi, Higher transcendental functions. Vols. I, . Based, in part, on notes left by Harry Bateman. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953

[19] T.Ernst, *The history of q-calculus and a new method,* Uppsala , 2000.

[20] T.Ernst, *A new method for q-calculus,* Uppsala dissertations 2002.

[21] T.Ernst, A method for q-calculus. *J. nonlinear Math. Physics* **10** No.4 (2003), 487-525.

[22] T.Ernst, q-Analogues of some operational formulas. Preprint 2003.

[23] T.Ernst, Some results for q-functions of many variables. Rendiconti di Padova,**112** (2004), 199-235.

[24] T.Ernst, q-Bernoulli and q-Euler Polynomials, An Umbral Approach. *International journal of difference equations* **1** no. 1 (2006), 31-80.

[25] T.Ernst, Some new formulas involving Γ_q functions. *Rendiconti di Padova*, to be published.

[26] T.Ernst, A renaissance for a q-umbral calculus. Proceedings of the International Conference Munich, Germany 25 - 30 July 2005. World Scientific, 2007.

[27] H.Exton, *q-hypergeometric functions and applications.* Ellis Horwood 1983.

[28] G.Gasper and M.Rahman, *Basic hypergeometric series,* Cambridge, 1990.

[29] C.F.Gauss, *Werke 3* Göttingen, 1876.

[30] L.Gegenbauer, Ein vergessener Österreicher. *[J] Deutsche Math.-Ver.* **12**(1903), 324-344.

[31] J.W.L.Glaisher, A chapter in elliptic functions *Quart. J.* **XVII** (1881), 50-65.

[32] J.W.L.Glaisher, On the Zeta-functions. Mess. XV (1885), 92-146.

[33] J.W.L.Glaisher, On the quantities $K, E, J, G, K', E', J', G'$ in elliptic functions. *Quart. J.* XX. (1885) ,313-361.

[34] J.W.L.Glaisher, On the deduction of the q-series for the elliptic functions from the q-products. *Mess.of math.* (2) **XVI** (1886), 133-139.

[35] J.W.L.Glaisher, On the transformation and developments of the twelve elliptic functions and the four Zeta-functions. Mess. (2) XVII (1887), 1-18.

[36] J.W.L.Glaisher, On the series which represent the twelve elliptic and the four Zeta functions. *Mess. of math.* (2) **XVIII** (1888), 1-84.

[37] A.G.Greenhill, *Les fonctions elliptiques et leurs applications*. Traduit de l'anglais par J. Griess, avec une préface de P. Appell. Paris. Carré. 1895.

[38] J.A.Grünert, Mathematische Abhandlungen. Altona : Hammerich, 1822.

[39] J.A.Grünert, Über die Summierung der Reihen von der Form ... [J] Borchardt J. **25** (1843), 240-279.

[40] C.Gudermann, *Grundriss der analytischen Sphärik*. Köln 1830.

[41] C.Gudermann, *Potenzial oder cyklisch-hyperbolische Functionen*. Berlin 1833.

[42] C.Gudermann, Integralia elliptica tertiae speciei reducendi... *J. reine angew. Math.* 14, (1835), 169-181.

[43] C.Gudermann, *Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale*, Berlin 1844.

[44] C.Gudermann, *Über die wissenschaftliche Anwendung der Belagerungs-Geschütze*. Münster 1850.

[45] P.Günther, Die Untersuchungen von Gauss in der Theorie der elliptischen Functionen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 1894: 92-105.

[46] W.Hahn, Beiträge zur Theorie der Heineschen Reihen. *Mathematische Nachrichten***2** (1949), 340-379.

[47] G.H.Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*. Première partie. Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries. (French) Paris. Gauthier-Villars. 1886

[48] E.Heine, Über die Reihe... *J. reine angew. Math.* **32** (1846), 210-212.

[49] E.Heine, Abriss einer Theorie der elliptischen Funktionen. *J. reine angew. Math.* **39** (1850), 122-137.

[50] E.Heine, *Handbuch der Theorie der Kugelfunktionen*. Bd.1. Berlin 1878.

[51] C.Hermite, *Oevres*, Tome II. Paris 1908.

[52] C.F.Hindenburg, *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*. Leipzig, 1795.

[53] C.F.Hindenburg, *Über combinatorische Analysis und Derivations-calcul*. Leipzig 1803.

[54] F.H.Jackson, A basic-sine and cosine with symbolical solution of certain differential equations. *Proc. Edinburgh math. Soc.* **22** (1904), 28-39.

[55] F.H.Jackson, On basic double hypergeometric functions. *Quart. J. Math., Oxford* Ser. 13 (1942), 69–82.

[56] C.G.J.Jacobi, *Fundamenta Nova*. 1829.

[57] C.G.J.Jacobi, Suite des notices sur les fonctions elliptiques. *J. reine angew. Math.* **3** (1828), 303-311.

[58] C.G.J.Jacobi, Über die zur numerischen Berechnung der elliptischen Functionen zweckmässigsten Formeln. *Journal f. Math.* **26** (18), 93-114.

[59] F.Klein, *Vorlesungen ber die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Bd. I+II. Bearbeitet von R. Courant und St. Cohn-Vossen. Springer 1979.

[60] L.Königsberger, Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Funktionen. *Borchardt J.* **LXXII** (1870), 176-254.

[61] M.Krause, *Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse*. 1. Bd. Leipzig: B. G. Teubner. 1895.

[62] J.H.Lambert, Observationes varies in mathesin puram. *Acta Helvetica, Physico-mathematico-anatomico-botanico-medica* **3** (1758), 128-168.

[63] H.Laurent, Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Paris. Gauthier-Villars 1880.

[64] H.Lemonnier, Mémoires sur les Foncions elliptiques, *Ann. École normale superieure* **4** (1875), 371-437.

[65] C.O.Meyer, Entwicklung der elliptischen Function ... nach dem Sinus und Cosinus der Vielfachen von x. *Journal f. Math.* **37** (1848), 281-304.

[66] G. Mittag-Leffler, A method of deriving the infinite double products in the theory of elliptic functions from the multiplication theorems. *Annals of Math.* (2) **27** (1926) 187-194.

[67] P.Nalli, Sopra un procedimento di calcolo analogo alla integrazione. (Italian) *Palermo Rend.* **47** (1923), 337-374.

[68] E.H.J.Neville, *Elliptic Functions.* Oxford University Press 1944.

[69] Th.Pepin, Introduction à la théorie des fonctions elliptiques d'après les oeuvres posthumes de Gauss. (French) Rom. Acc. P. d. N. L. Mem. IX_2. 1-129, 1893.

[70] B. Riemann, Riemanns Vorlesungen über elliptischen Funktionen. Leipzig 1899.

[71] A.Pringsheim, Über einen Fundamentalsatz aus der Theorie der elliptischen Functionen. *Klein Ann.* **XXVII** (1885), 151-157.

[72] S.L.Qiu and M.Vuorinen, *Handbook of complex analysis: geometric function theory.* Volume 2. Amsterdam: Elsevier/North Holland. 621-659 (2005).

[73] E.D.Rainville, *Special functions,* Bronx, N.Y., 1971.

[74] H.F.Scherk, Bemerkungen über die Lambertsche Reihe. *Journal f. Math.* **9**(1832), 162-168.

[75] N.Schulze, Entwicklungen elliptischen Functionen in Reihen und der darauf gegründeten Vergleichung derselben. *Grünert Archiv* **19**(1852), 181-196.

[76] H.A.Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz. Zweite Ausgabe. Erste Abteilung. (German) Berlin. J. Springer. (1893).

[77] M.Ward, A calculus of sequences. *Amer. J. Math.* **58** (1936), 255–266.

[78] E.T.Whittaker and G.N.Watson, A course of modern analysis. Reprint of the fourth (1927) edition. Cambridge 1996.

[79] J.Worpitzky, Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen. *J. f. Math.* **94** (1883), 203-232.

Department of Mathematics, Uppsala University, P.O. Box 480, SE-751 06 Uppsala, Sweden

E-mail address: `thomas@math.uu.se`