

PROJEKT-/FORSKNINGSBESKRIVNING

THOMAS ERNST

1. INLEDNING

Jag forskar inom det tvärvetenskapliga matematikämnet q -analys; min första bok kom ut 2012 och jag arbetar nu på två fortsättningar. Ämnet är mycket gammalt och omfattar stora delar av matematiken och fysiken: man har även stor nytta av språkkunskaper eftersom det finns en rikhaltig litteratur inom området.

I q -analys börjar man med ett matematiskt objekt, t.ex. ett komplext tal, en derivata, en integral, eller en ekvation. Sedan inför man en s.k. q -analog till detta objekt genom att införa en extra variabel q , som kan vara reell ($0 < q < 1$) eller komplex ($0 < |q| < 1$). Denna q -analog har egenskapen att $\lim_{q \rightarrow 1} =$ det ursprungliga objektet. Och inte nog med det, det finns t.o.m. många q -analoger; exponentialfunktionen, som är ett viktigt objekt, har flera kända q -analoger, som ibland används tillsammans. Vi befinner oss nu inom området meromorfa funktioner inom komplex analys.

Den viktigaste q -analogen för mitt vidkommande är den q -hypergeometrisk funktionen, q -analog till Gauss hypergeometrisk funktion från 1812. Det är här mitt bidrag kommer genom att jag inför logaritmer i q -analysen, vilket möjliggör att man kan skriva dessa ekvationer av G.N. Watson (känd för boken om Besselfunktioner), Ramanujan etc. på en konsistent form som liknar ursprungsformeln. Den indiske matematikern Ramanujan uppmärksammades i somras genom filmen 'the man who knew infinity', som gick på bio här i Uppsala. Beteckningen ∞ , som användes av Gauss 1812, är en viktig beståndsdel i min logaritmiska notation för q -analys. Två av världens mest kända " q -analytiker" (Bruce Berndt och George Andrews), är även ledande experter på Ramanujan. Jag lärde känna dem genom vår egen Dennis Hejhal. Detta visar nu att q -analys är analytisk talteori, men även elliptiska funktioner och thetafunktioner (kärt barn har flera namn). Men q -analys är även diskret matematik, eller kombinatorik, liksom Julius Wess' supersymmetri inom partikelfysiken. Julius Wess var först med

Date: February 8, 2017.

att q -deformera Maxwells ekvationer. Han var fysikprofessor i Karlsruhe och München, hans doktorand Andreas Ruffing har arrangerat flera konferenser i differensekvationer, där jag har talat om q -analys. q -analys är alltså även differensekvationer, eller q -analoger till differentialekvationer; mitt nästa projekt är därför att q -deformera Laplace- och Fouriertransformationen och distributionerna.

2. HUR JAG LÄRDE MIG q -ANALYS OCH (MULTIPLA) HYPERGEOMETRISKA SERIER

I början har jag varit en slags autodidakt i q -analys. Algebraikern Sergei Silvestrov (numera professor vid Mälardalens högskola i Västerås) lärde mig q -analys på KTH 1997. Han uppmanade mig att noggrant studera litteraturen om hypergeometriska serier. Därför gick jag igenom hela litteraturen i ämnet, bland annat med hjälp av det då nyligen introducerade internet och våra fina bibliotek i Uppsala och Mittag-Lefflerbiblioteket i Djursholm.

Sedan träffade jag genom min handledare Christer Kiselman Jaak Peetre på en konferens i Lund 1999 och lärde där känna Per Karlsson (1940-2012), DTU, Lyngby. Jaak introducerade mig i Estland och Polen.

Sedan blev Per min mentor i Köpenhamn och jag kunde få kontakt med hans medförfattare, indiern Hari M. Srivastava. Den senare blev min opponent 2002 och introducerade mig i Sydkorea utan att jag behövde åka dit. Per Karlsson dog alltså för några år sedan och jag har övertagit hela hans bibliotek, som bl.a. omfattar Srivastavas publikationer och hela litteraturen om hypergeometriska serier inklusive hans refereerapporter och recensioner. Jag åker regelbundet till Köpenhamn för att träffa hans son. Pers omfattande arbeten är färdiga för publikation, det blir flera böcker som kommer att ges ut av undertecknad. Jag har dessutom övertagit vissa delar av Uppsalas matematikbibliotek. Det finns även möjlighet att skriva populärvetenskapliga artiklar. Min opponent var alltså indiern Hari M. Srivastava (British Columbia, Kanada), som har skrivit den enda moderna boken om multipla hypergeometriska funktioner (här finns mycket få experter), tillsammans med Per Karlsson.

Vidare samarbetar jag indirekt med Johann Cigler i Wien, som jag betraktar som en stor q -analys-expert och q -didaktiker; han skriver företrädevis på tyska. I min bok beskrivs denna österrikiska skola ingående.

Sammanfattningsvis: q -analys finns i Holland, Belgien, Österrike, USA, Indien, Sydkorea och Kina. Andra varianter eller dialekter förekommer i Frankrike, Danmark och Tyskland. Det finns alltså andra skolor inom q -analysen, förutom min egen. q -analys är matematikens termodynamik, som fortfarande tyvärr befinner sig på Boltzmanns nivå i mångas ögon. Syftet med min forskning är bl.a. att råda bukt på detta missförhållande.

2.1. Självutvärdering av mina tidiga forskningsinsatser. Jag har skrivit två böcker om q -hypergeometriska serier i Birkhäuser (Basel) och fler böcker är på gång. Ett annat projekt, som presenteras senast i Västerås och på konferensen i Gent 2014, är nya q -deformerade Liealgebror och Liegrupper i kombination med en q -deformerad differentialgeometri och ett q -deformerat de Sitter universum.

Jag har stor nytta av det symboliska programmet Mathematica, som jag använder regelbundet för att kontrollera mina formler.

Efter min första större publikation vände jag mig till q -funktioner av många variabler och Γ_q -funktioner, delvis assisterad av Per Karlsson vid DTU i Danmark. I flera av mina artiklar generaliserar jag formler av min opponent på min disputation Hari M. Srivastava, och visade användbarheten av tildeoperatorn. Även om jag anser mig en expert på q -Bernoulli och q -Euler polynom, är detta ämne ännu inte avslutad, och jag vet exakt hur man ska fortsätta detta arbete. Genom mina många resor har jag uppnått goda kunskaper i tyska och vissa kunskaper i franska, som gör det möjligt att ha bra internationella kontakter.

3. OM SPECIELLA FUNKTIONER I UPPSALA UNDER 1800-TALET

Uppsala-matematikern Carl Johan Malmsten (1814–1886) var en stor expert på speciella funktioner i sin ungdom, men hans arbete har fallit i glömska. Han bevisade bl.a. en integral-representation av $\ln |\Gamma(x)|$. Mycket senare, 2014 återupptäckte Iaroslav Blagouchine dessa Malmsten-integraler och bevisade dem genom kontur-integration. Malmsten hade en stor matematik-bibliotek, där man kan se att han kände den norske matematikern Ludwig Sylow. Hans elev Göran Dillner (1832-1906), handledare för Mittag-Leffler i Uppsala, presenterade moderna vektorforms-kvarternioner i en tysk artikel publicerad 1877. Han handledde sedan Erik Lundberg (1846–1911), som introducerade så kallade hypergoniometriska funktioner, generaliseringar av trigonometriska funktioner, som uppfyller vissa anmärkningsvärda 'pytagoreiska formler':

$$(1) \quad \operatorname{sn}_p^p(t) + \operatorname{cn}_p^p(t) = 1, \quad p > 1.$$

Dillner var den ende matematikprofessorn i Uppsala 1877-1897 och vurmade speciellt för elliptiska funktioner, eller en dialekt av q -analys. Hans lärjunge Matths Falk (1841-1926) skrev ett ofta citerat arbete om elliptiska funktioner 1892. Falk var professor i matematik i Uppsala 1890-1906. Malmstens doktorand Hjalmar Holmgren (1822-1885) skrev flera långa artiklar om differential-operatörer och differentialekvationer. Jag planerar att hitta q -analoger till hans fina formler. Hans son Erik Holmgren (1872-1943) studerade också differentialekvationer, och i synnerhet värmeledningsekvationen.

4. APPLIKATIONER I FYSIKEN

Den speciella matematik som bygger upp den s.k. q -analysen ger en alternativ väg för lösning av differentialekvationer. Den är därmed av intresse för fysikaliska tillämpningar, och flera sådana har redan påvisats där q -analoger har ställts upp för klassiska system inom mekaniken och elektricitetsläran. Det visar sig emellertid att också lösningar till Schrödingerekvationer är möjliga genom q -analys, och därmed blir kvantsystem av intresse. Hittills saknas q -analoger till sådana, medan lösningar för väteliknande atomer kan erhållas på detta nya sätt.

Speciellt kan Legendrepolynomen, som ingår i vågfunktionerna för sådana system, hanteras på ett systematiskt sätt. Eftersom sådana polynom kan ingå även i behandlingen av flerelektronsystem kan forskningen omfatta även sådana atomer. Här finns ett mycket stort experimentellt material att jämföra med och metodutvecklingen kommer att ske i nära samarbete med forskningsgrupper inom atom- och molekylfysik. Förutom studier av elektroniska tillstånd kommer metoderna att provas för molekylvibrationer och rotationer. Det kan tilläggas att jag har q -deformerat Jacobi-, Laguerre-, Hermite- och Legendrepolynomen.

q -Analysen kan även användas i elementarpartikelfysiken. I den statistiska mekaniken dyker q -bosoner och q -fermioner upp, medan s.k. q -positroner skulle kunna definieras som lösningar till q -Diracekvationen. Teorin för kvarkar har även ett samband med q -analys, och undertecknad söker aktivt efter samarbetspartners inom detta område.

Genom mitt deltagande i internationella konferenser får Sverige en representant där och för detta forskningsområde. q -analysen har stor betydelse inom grundläggande och tillämpad matematik, vilket framgår bl.a. av det faktum att det inom detta område anordnas flera internationella konferenser varje år.